УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УГЛТУ

Г.Г. Ордуянц
В.Я. Тойбич

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ САР

Екатеринбург
2012

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра автоматизации производственных процессов

Г.Г. Ордуянц
В.Я. Тойбич

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ САР

Методические указания
по курсу «Теория автоматического управления»
для студентов очной и заочной форм обучения
специальностей 220301, 220200, 220400 и 220700

Екатеринбург
2012

Печатается по рекомендации методической комиссии лесоинженерного факультета.
Протокол № 1 от 8 сентября 2011 г.

Рецензент доцент канд. техн. наук С.П. Санников

Редактор К.В. Корнева
Оператор компьютерной верстки Т.В. Упорова

Подписано в печать 23.10.12		Поз. 9
Печать плоская	Формат 60x84 1/16	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 1,39	Цена 7 р. 08 к.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

Введение

Настоящие методические указания посвящены наиболее важному разделу курса «Теория автоматического управления» – расчету переходных процессов в линейных автоматических системах. Переходные процессы являются одним из сложных режимов автоматических систем. Они определяют, по сути, качество регулирования этих систем.

Задача 1

Система автоматического регулирования (САР) имеет структурную схему, изображенную на рисунке 1.

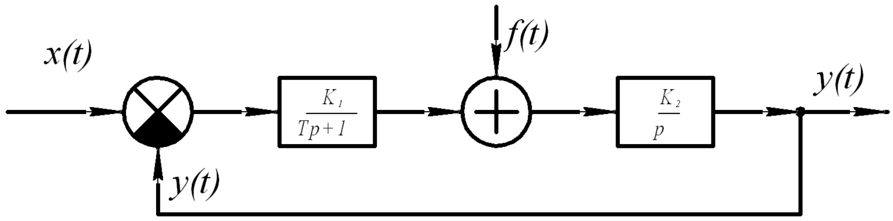

Рис. 1. Структурная схема САР

Заданы параметры системы ($K_1K_2 = 100$, $T = 0{,}025$ с) и возмущающее воздействие $f(t) = \delta(t)$.

В отсутствие задающего воздействия ($x(t) = 0$) найти закон изменения выходного сигнала $y(t)$.

Решение:

$$y(t) = L^{-1}[W_3(p)] = L^{-1}\left[\frac{\dfrac{K_2}{p}}{1+\dfrac{K_2K_1}{p(Tp+1)}}\right] = L^{-1}\left[\frac{K_2(Tp+1)}{p^2T+p+K_1K_2}\right] =$$

$$= L^{-1}\left[\frac{K_2}{T}\,\frac{Tp+1}{p^2+\dfrac{1}{T}p+K_1K_2}\right] = \frac{K_2}{T}\,L^{-1}\left[\frac{G(p)}{H(p)}\right],$$

где $G(p) = Tp+1$, $H(p) = p^2+\dfrac{1}{T}p+\dfrac{K_1K_2}{T}$.

По теореме разложения

$$y(t) = \frac{K_2}{T}\sum_1^n \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_kt},$$

где p_k – корни характеристического уравнения $H(p) = 0$,

$$G(p_k) = G(p_k)|_{p=p_k}, \; H'(p) = \frac{d}{dp}H(p)|_{p=p_k} = \left(2p + \frac{1}{T}\right)|_{p=p_k}.$$

Находим корни:

$$p^2 + \frac{1}{T}p + \frac{K_1K_2}{T} = p^2 + \frac{1}{0{,}025}p + \frac{100}{0{,}025} = p^2 + 40p + 4000 = 0,$$

$$p_{1,2} = -20 \pm \sqrt{20^2 - 4000}, \text{ откуда } p_1 = -20 + j60, \; p_2 = -20 - j60.$$

$$H'(p_1) = 2(-20 + j60) + \frac{1}{0{,}025} = -40 + j120 + 40 = +j120,$$

$$H'(p_2) = 2(-20 - j60) + \frac{1}{0{,}025} = -40 - j120 + 40 = -j120.$$

$$y(t) = \frac{K_2}{0{,}025}\left[\frac{0{,}025(-20 + j60)}{j120}e^{(-20+j60)t} + \frac{0{,}025(-20 - j60)}{-j120}e^{(-20-j60)t}\right] =$$

$$= e^{-20t}\frac{K_2}{0{,}025}\frac{1{,}58}{60}\frac{1e^{j71^\circ34'}e^{j60t} - e^{-71^\circ34'}e^{-j60t}}{j2} = 1{,}05K_2e^{-20t}\sin\,(60t + 71^\circ34').$$

При $t = 0$ $y(0) = 1{,}05K_2e^0\sin 71^\circ34' = 1K_2 = K_2$.

График $y(t)$ изображен на рисунке 2.

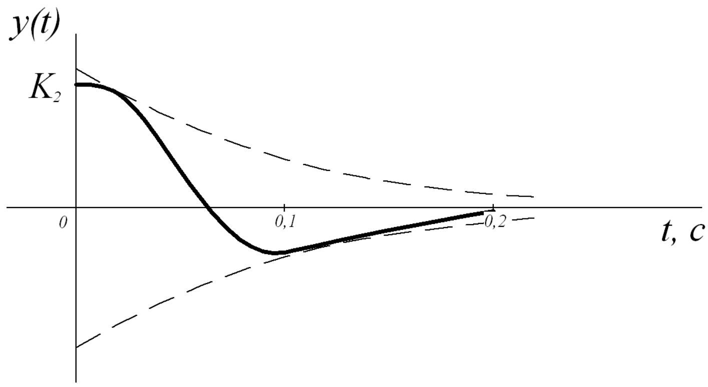

Рис. 2. График $y(t)$

Задача 2

Структурная схема САР имеет вид, изображенный на рисунке 3.

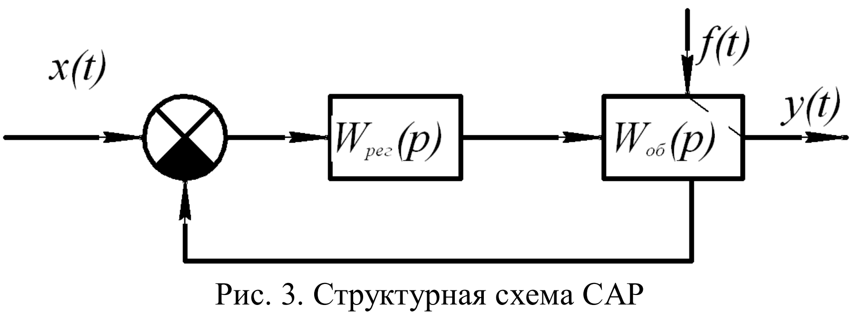

Рис. 3. Структурная схема САР

Заданы передаточные функции объекта по x и f.

$$W_{\substack{об \\ по\,X}}(p)=\frac{K_{об}}{T_{об}p+1};\; W_{\substack{об \\ по\,f}}(p)=\frac{K_f}{T_{об}p+1},$$

где $K_{об}=1$ с$^{-1}$, $K_f=1{,}5$ с$^{-1}$, $T_{об}=3$ с.

Возмущение $f(t)=1(t)$.

Найти и построить $y(t)$ в случаях сопряжения объекта с П- и ПИ- регуляторами. Сравнить с системой без регулятора.

Решение:

А. Система сопрягается с П-регулятором, передаточная функция которого $W_{рег}(p)=K_p=2$. Запишем передаточную функцию замкнутой САР по возмущению:

$$W_{\substack{зам \\ по\,f}}(p)=\frac{W_{\substack{об \\ по\,f}}(p)}{1+W_{\substack{об \\ по\,X}}(p)\,W_{рег}(p)}=\frac{\dfrac{K_f}{T_{об}p+1}}{1+\dfrac{K_{об}}{T_{об}p+1}K_{рег}}=\frac{K_f}{T_{обр}p+1+K_{рег}K_{об}}.$$

Тогда

$$Y(p)=W_{\substack{зам \\ по\,f}}(p)\,F(p)=\frac{K_f}{T_{об}p+1+K_{рег}K_{об}}\frac{1}{p}=$$

$$=\frac{1{,}5}{p(3p+1+2\cdot 1)}=\frac{1{,}5}{3p(p+1)}=\frac{0{,}5}{p(p+1)}=\frac{G(p)}{H(p)}.$$

Для нахождения $y(t)$ применим теорему разложения:

$$y(t)=\sum_1^2\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_k t},$$

где $G(p_k)=G(p)|_{P=P_k}$, $H'(p)=\dfrac{d}{dp}H(p)|_{p=p_k}=[(p+1)+p]|_{p=p_k}$.

Найдем корни характеристического уравнения $H(p)=0$.

$$p(p+1)=0\text{, откуда } p_1=0,\; p_2=-1.$$

$$H'(p_1)=1,\; H'(p_2)=-1.$$

Тогда $\underset{«П»-\,рег.}{y(t)}=\dfrac{0{,}5}{1}e^0+\dfrac{0{,}5}{-1}e^{-t}=0{,}5(1-e^{-t})$.

Решение в этом случае представляет собой экспоненту, проходящую при $t=0$ через 0 и стремящуюся при $t\to\infty$ к 0,5. Постоянная времени этой экспоненты $T_Э=1$ с.

Чтобы получить решение для системы без регулятора, достаточно в выражении $Y(p)$ поставить $K_{рег}=1$.

Тогда $\underset{без\ рег.}{Y(p)} = \dfrac{1{,}5}{p(3p+1+1)} = \dfrac{1{,}5}{p(3p+2)} = \dfrac{1{,}5}{2p(\frac{3}{2}p+1)} = \dfrac{0{,}75}{p(1{,}5p+1)}$.

Используя теорему разложения, получим $\underset{без\ рег.}{y(t)} = 0{,}75(1-e^{-t/1{,}5})$.

Получили экспоненту с постоянной времени 1,5 с, стремящуюся при $t \to \infty$ к 0,75.

Проведем сравнение с предыдущим решением:

– в системе без регулятора установившееся отклонение от ранее существующего режима (y_∞) равно 0,75, в то время как в системе с П-регулятором оно меньше $(y_\infty = 0{,}5)$;
– переходный процесс в системе с регулятором идет быстрее, т.к. постоянная времени экспоненты меньше.

Б. Система сопрягается с ПИ-регулятором, передаточная функция которого $W_{рег}(p) = K_{рег}(1+\dfrac{1}{T_{из}p})$,

где $K_{рег} = 2$ с$^{-1}$, $T_{из} = 5$ с.

Найдем изображение выходного сигнала в этом случае:

$$Y(p) = \underset{по\ f}{W_{зам}}(p)F(p) = \frac{\underset{по\ f}{W_{об}}(p)}{1+\underset{по\ X}{W_{об}}(p)W_{рег}(p)}\frac{1}{p} = \frac{\dfrac{K_f}{T_{об}p+1}}{1+\dfrac{K_{об}K_{рег}}{T_{об}p+1}\left(1+\dfrac{1}{T_{из}p}\right)}\frac{1}{p} =$$

$$= \frac{K_f T_{из}}{T_{об}T_{из}p^2 + p(T_{из}+K_{рег}K_{об}T_{из}) + K_{рег}K_{об}} = \frac{1{,}5\cdot 5}{3\cdot 5p^2 + p(5+2\cdot 1\cdot 5)+2\cdot 1} =$$

$$= \frac{7{,}5}{15p^2+15p+2} = \frac{7{,}5}{15(p^2+p+0{,}133)} = \frac{0{,}5}{p^2+p+0{,}133} = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

Тогда $y(t) = \sum\limits_1^2 \dfrac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_k t}$,

где $G(p_k) = G(p)|_{p=p_k}$, $H'(p_k) = \dfrac{d}{dp}H(p)|_{p=p_k} = (2p+1)|_{p=p_k}$.

Корни уравнения $H(p) = p^2 + p + 0{,}133 = 0$ получаются равными:

$$p_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 0{,}133} = -0{,}5 \pm 0{,}134.$$

Отсюда $p_1 = -0{,}5 - 0{,}34 = -0{,}84$, $p_2 = -0{,}5 + 0{,}34 = -0{,}16$.

$$H'(p_1) = 2(-0{,}84)+1 = -0{,}68,\ H'(p_2) = 2(-0{,}16)+1 = 0{,}68.$$

Тогда $\underset{«ПИ»-рег.}{y(t)} = \dfrac{0{,}5}{-0{,}68}e^{-0{,}84t} + \dfrac{0{,}5}{0{,}68}e^{-0{,}16t} = 0{,}735(e^{-0{,}16t} - e^{-0{,}84t})$.

Анализ полученного решения показывает, что переходный процесс апериодический, установившееся отклонение от ранее существовавшего режима стремится к нулю.

На рисунке 4 изображены все три переходных процесса.

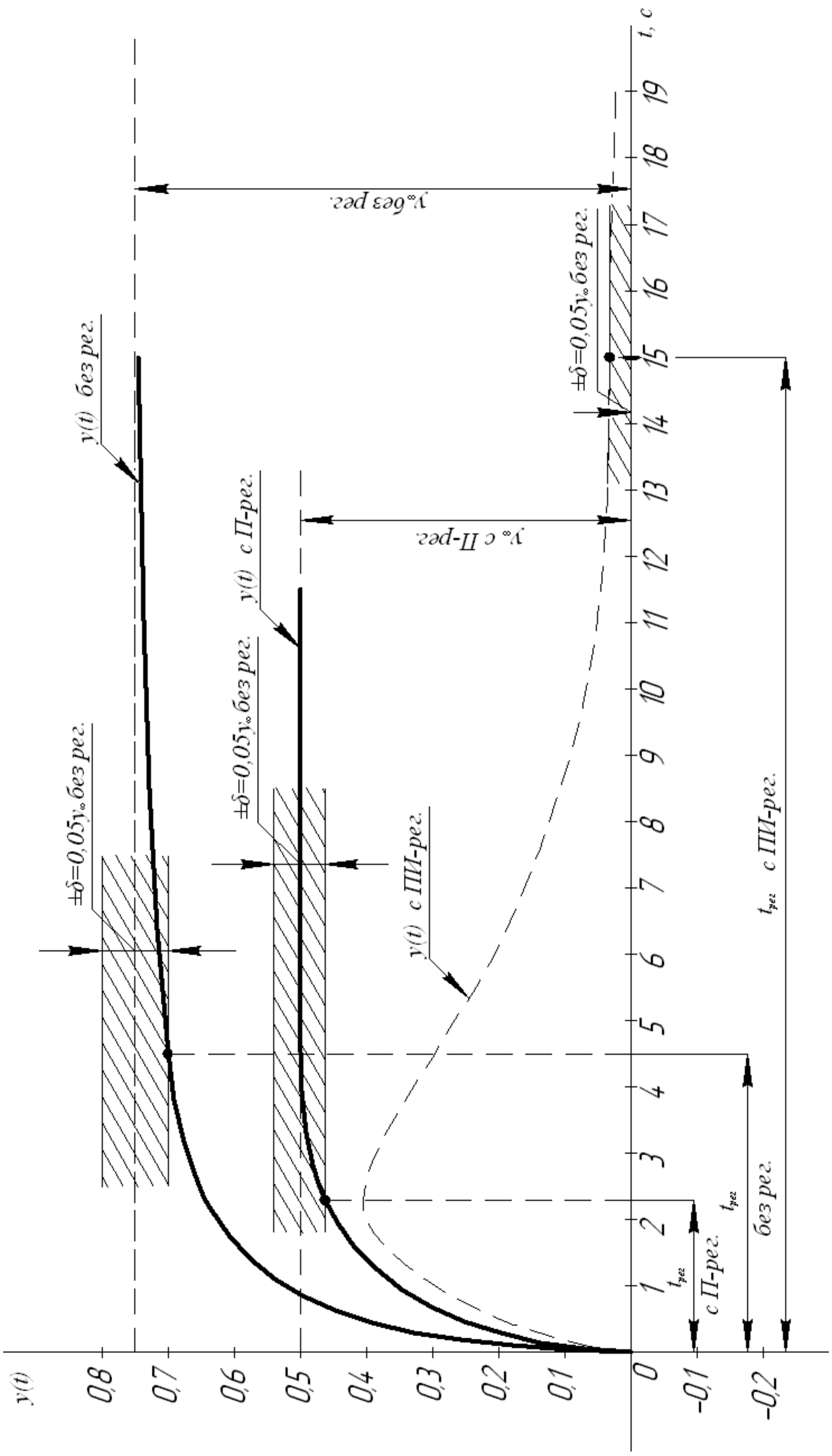

Рис. 4. Графики переходных процессов *y(t)* в системе без регулятора с П- и ПИ-регуляторами

Общие выводы таковы:

– время регулирования самое меньшее в случае сопряжения объекта с П-регулятором ($t_{рег} = 2{,}3$ с), самое большое – с ПИ-регулятором ($t_{рег} = 15$ с), т.к. к инертности самого объекта добавляется инертность ПИ-регулятора;
– ПИ-регулятор обеспечивает астатическое регулирование ($y_\infty = 0$), в то время как П-регулятор регулирует заведомо с ошибкой ($y_\infty = 0{,}5$), но она меньше, чем в системе без регулятора вовсе ($y_\infty = 0{,}75$).

Задача 3

Следящая система описывается дифференциальным уравнением вида $Y(p)(p+0{,}5)(p+1) = 10X(p)$.

Найти и построить выходной сигнал $y(t)$, если входной сигнал $x(t) = e^{-2t}$, а начальные условия нулевые.

Решение:

найдем значения для $Y(p)$.

$$Y(p) = \frac{10X(p)}{(0{,}1p+1)(p+1)} = \frac{10}{(p+0{,}5)(p+1)(p+2)} = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

Здесь учтено, что изображение $e^{-2t} = \dfrac{1}{p+2}$.

Для нахождения оригинала $y(t)$ применим теорему разложения:

$$y(t) = \sum_1^3 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t},$$

где $G(p_k) = G(p)|_{p=p_k}$, $H'(p_k) = \dfrac{d}{dp} H(p)|_{p=p_k} =$

$= [(p+1)(p+2) + (p+0{,}5)(p+2) + (p+0{,}5)(p+1)]|_{p=p_k}$.

Найдем корни характеристического уравнения:

$$H(p) = (p+0{,}5)(p+1)(p+2) = 0.$$

Получим: $p_1 = -0{,}5,\ p_2 = -1,\ p_3 = -2$;

$$H'(p_1) = (-0{,}5+1)(0{,}5+2) = 0{,}75;\ H'(p_2) = (-1+0{,}5)(-1+2) = -0{,}5;$$

$$H'(p_3) = (-2+0{,}5)(-2+1) = 1{,}5.$$

Тогда:

$$y(t) = \frac{10}{0{,}75} e^{-0{,}5t} + \frac{10}{-0{,}5} e^{-t} + \frac{10}{1{,}5} e^{-2t} = 13{,}33\,e^{-0{,}5t} - 20\,e^{-t} + 6{,}66\,e^{-2t}.$$

Проверим решение для $y(0)$:

$y(0) = 13{,}33 - 20 + 6{,}66 \cong 0$, что соответствует заданным начальным условиям.

На рисунке 5 изображен график $y(t)$. Тонкими линиями обозначены составляющие сигналы $y(t)$.

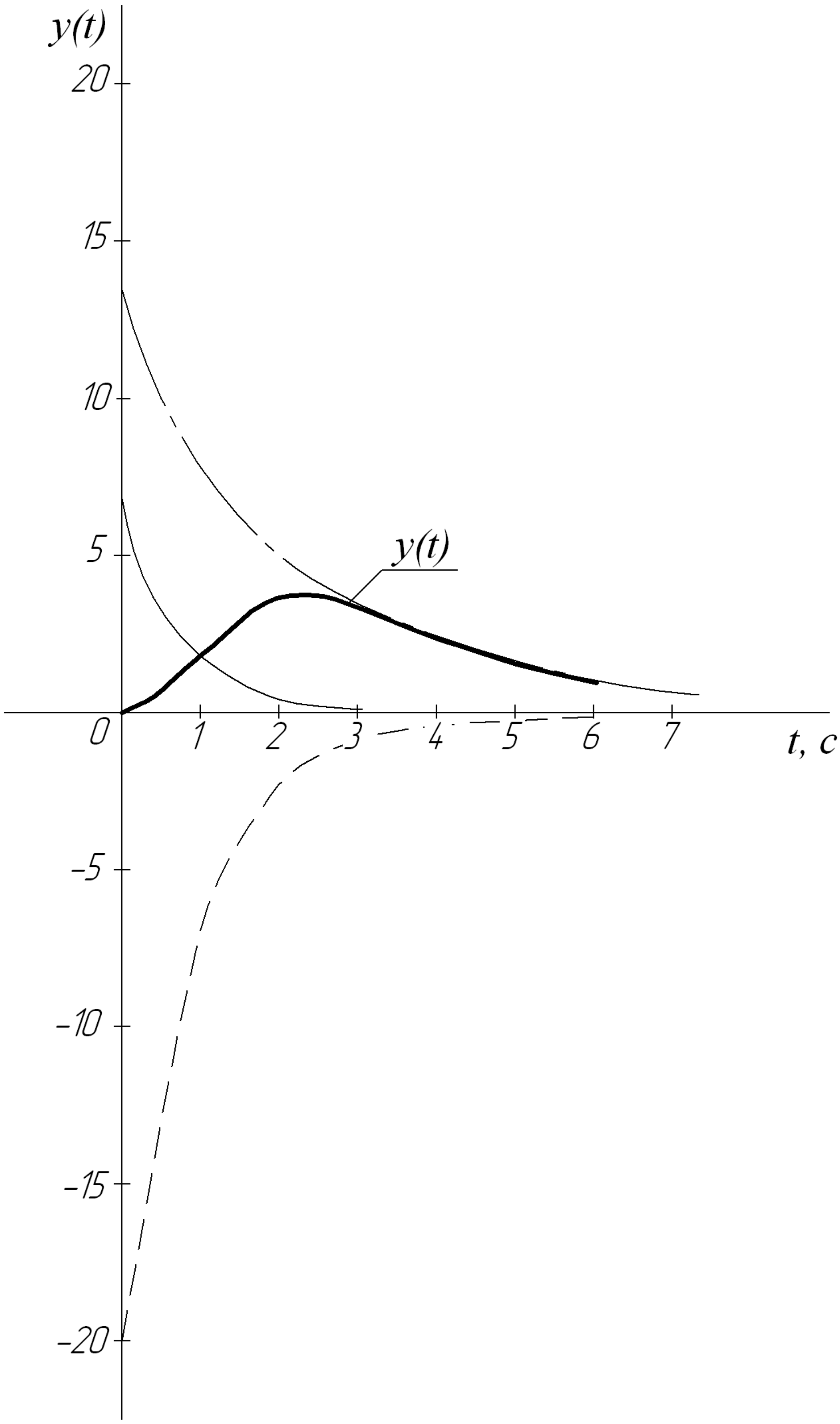

Рис. 5. График переходного процесса $y(t)$

Задача 4

Следящая система в замкнутом состоянии описывается дифференциальным уравнением вида $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = x(t)$.

Найти и построить закон изменения выходного сигнала $y(t)$ и ошибки $\delta(t)$, если на входе $x(t) = 1(t)$, а начальные условия нулевые.

Решение:

запишем уравнение в операторной форме, учитывая изображение входного сигнала $1(t) = \frac{1}{p}$ и нулевые начальные условия.

$$p^2Y(p) + 2pY(p) + 10Y(p) = X(p)$$

Отсюда $Y(p) = \frac{X(p)}{p^2 + 2p + 10} = \frac{1}{p(p^2 + 2p + 10)} = \frac{G(p)}{H(p)}$.

Тогда $y(t)$ по теореме разложения можно найти так:

$$y(t) = \sum_1^3 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$H(p) = p(p^2 + 2p + 10) = 0.$$

Получим: $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 10} = -1 \pm j3 = \sqrt{10}\underline{|\pm 108{,}4^\circ}$.

Тогда:

$$H'(p) = \frac{d}{dp}H(p) = \frac{d}{dp}\left[p(p^2 + 2p + 10)\right] = (p^2 + 2p + 10) + p(2p + 2).$$

Подставляя в последнее выражение поочередно p_1, p_2 и p_3, получим:

$$H'(p_1) = 10,$$

$$H'(p_2) = \sqrt{10}\underline{|108{,}4^\circ}(-2 + j6 + 2) = j6\sqrt{10}\underline{|108{,}4^\circ},$$

$$H'(p_3) = \sqrt{10}\underline{|-108{,}4^\circ}(-2 - 6j + 2) = -j6\sqrt{10}\underline{|-108{,}4^\circ}.$$

Тогда:

$$y(t) = \frac{1}{10}e^0 + \frac{1}{j6\sqrt{10}\underline{|108{,}4^\circ}} e^{(-1+j3)t} + \frac{1}{-j6\sqrt{10}\underline{|108{,}4^\circ}} e^{(-1-j3)t} =$$

$$= 0{,}1 + \frac{1}{3\sqrt{10}} e^{-t}\left[\frac{e^{j3t}}{2je^{j108{,}4^\circ}} + \frac{e^{-j3t}}{-2je^{-j108{,}4^\circ}}\right] = 0{,}1 + 0{,}105e^{-t}\,\frac{e^{j(3t-108{,}4^\circ)} - e^{-j(3t-108{,}4^\circ)}}{2j} =$$

$$= 0{,}1 + 0{,}105e^{-t}\sin(3t - 108{,}4^\circ).$$

Проверим величину $y(0)$:

$$y(0) = 0{,}1 + 0{,}105e^{0}\sin(-108{,}4^{\circ}24') = 0{,}1 + 0{,}105(-0{,}948) \cong 0\,.$$

Установившееся значение $y_{\infty} = 0{,}1$.

Для нахождения ошибки $\delta(t)$ надо вычесть $y(t)$ из входного воздействия $x(t)$:

$$\delta(t) = x(t) - y(t) = 1(t) - y(t) = 1 - [0{,}1 + 0{,}105\sin(3t - 108^{\circ}24')] =$$

$$= 0{,}9 - 0{,}105\sin(3t - 108^{\circ}24')\,.$$

При $t = 0$ $\delta(0) = 0{,}9 - 0{,}105(-0{,}948) \cong 1$.

Установившееся значение ошибки $\delta_{\infty} = 0{,}9$.

На рисунке 6 изображены законы изменения $y(t)$ и $\delta(t)$.

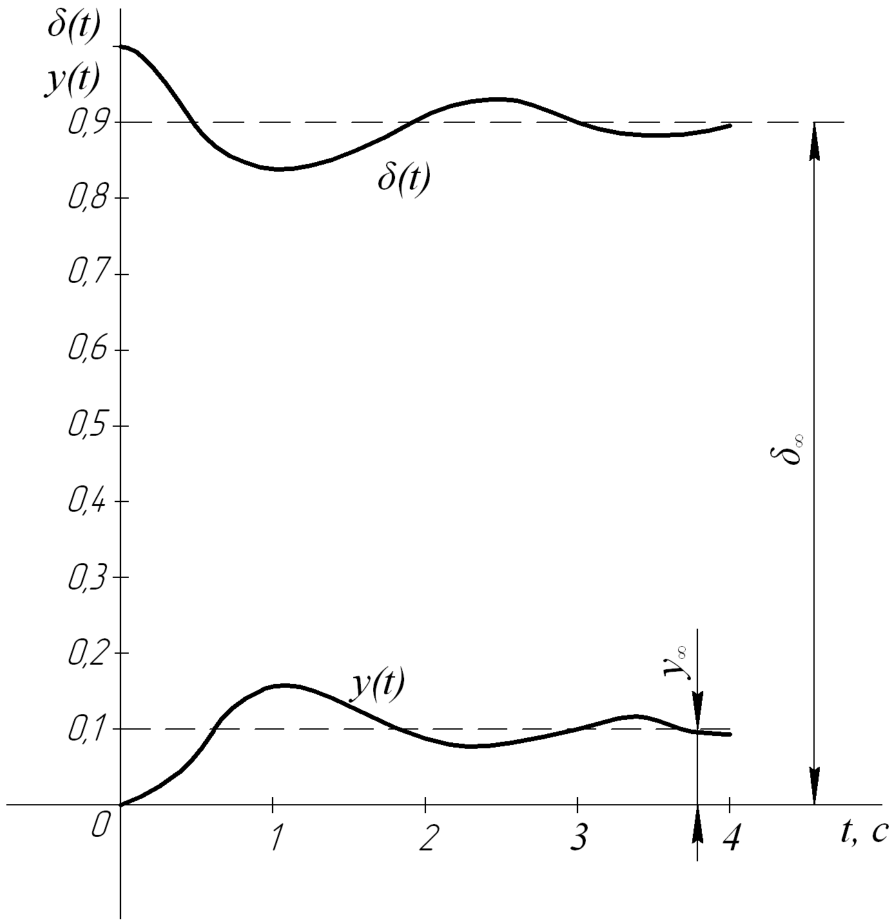

Рис. 6. Графики $y(t)$ и $\delta(t)$

Задача 5

В условиях предыдущей задачи найти законы изменения $y(t)$ и $\delta(t)$, если начальные условия ненулевые: $y(0)=0{,}5$.

Решение:

операторное уравнение в этом случае должно учитывать ненулевые начальные условия для y:

$$p^2Y(p)-pY(0)+2pY(p)-2y(0)+10Y(p)=X(p),$$

$$Y(p)(p^2+2p+10)=X(p)+py(0)+2y(0),$$

$$y(p)(p^2+2p+10)=\frac{1}{p}+0{,}5p+1,$$

$$Y(p)(p^2+2p+10)=\frac{0{,}5p^2+p+1}{p}.$$

Отсюда $Y(p)=\dfrac{0{,}5p^2+p+1}{p(p^2+2p+10)}=\dfrac{G(p)}{H(p)}$.

Корни характеристического уравнения и значения $H'(p_k)$ те же, что и в предыдущей задаче.

Находим $y(t)$:

$$y(t)=\sum_1^3\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}e^{p_kt}=\frac{1}{10}e^0+\frac{0{,}5(\sqrt{10}e^{j108{,}4^\circ})^2+(-1+j3)+1}{j6\sqrt{10}e^{j108{,}4^\circ}}e^{(-1+j3)t}+$$

$$+\frac{0{,}5(\sqrt{10}e^{-j108{,}4^\circ})^2+(-1-j3)+1}{-j6\sqrt{10}e^{-j108{,}4^\circ}}e^{(-1-j3)t}=$$

$$=0{,}1+e^{-t}\frac{-4}{j6\sqrt{10}e^{j108{,}4^\circ}}e^{j3t}+e^{-t}\frac{-4}{-j6\sqrt{10}e^{-j108{,}4^\circ}}e^{-j3t}=$$

$$=0{,}1+\frac{-4}{3\sqrt{10}}e^{-t}\frac{e^{-j108{,}4^\circ}e^{j3t}-e^{+j108{,}4^\circ}e^{-j3t}}{2j}=$$

$$=0{,}1-0{,}42e^{-t}\frac{e^{j(3t-108{,}4^\circ)}-e^{-j(3t-108{,}4^\circ)}}{2j}=$$

$$=0{,}1-0{,}42e^{-t}\sin(3t-108{,}4^\circ).$$

Проверим значение $y(0)$:

$$y(0)=0{,}1-0{,}42\sin(-108{,}4^\circ)=1-0{,}42(-0{,}95)\cong0{,}5.$$

Решение для $\delta(t)$ может быть получено так:

$$\delta(t)=x(t)-y(t)=1-[0{,}1-0{,}42e^{-t}\sin(3t-108{,}4^\circ)]=0{,}9+0{,}42e^{-t}\sin(3t-108{,}4^\circ);$$

$$\delta(0)=0{,}9+0{,}42\sin(-108{,}4^\circ)\cong0{,}5;\ \delta_\infty=0{,}9.$$

На рисунке 7 изображены графики $y(t)$ и $\delta(t)$. Тонкими линиями обозначены вспомогательные построения.

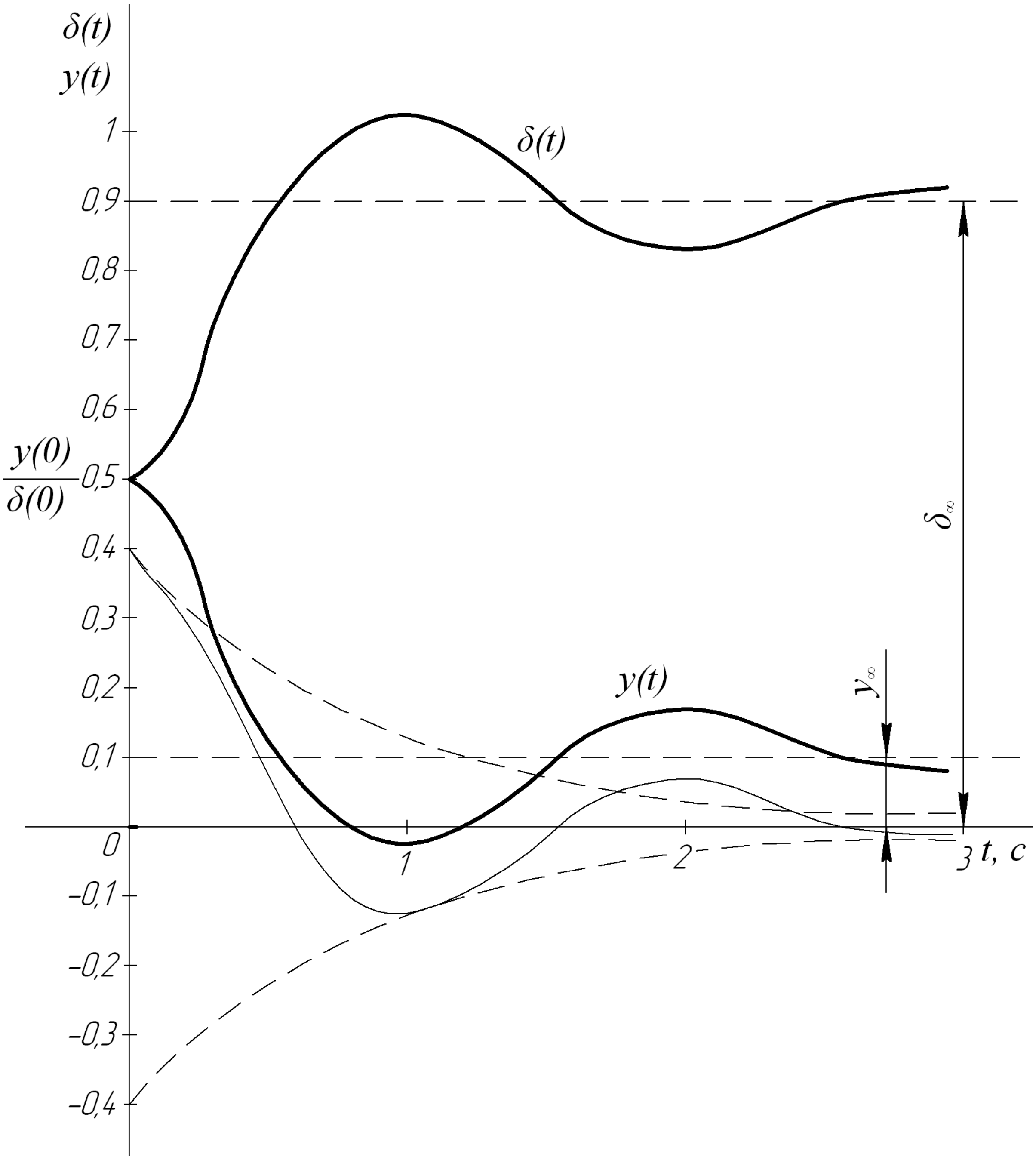

Рис. 7. Законы изменения выходного сигнала $y(t)$ и ошибки $\delta(t)$

Задача 6

Следящая система в разомкнутом состоянии описывается дифференциальным уравнением:

$$Y(p)p(p+1) = X(p).$$

Найти и построить закон изменения ошибки $\delta(t)$ в замкнутой системе, если входное воздействие $x(t) = 1(t)$, а начальные условия нулевые.

Решение:

найдем операторное изображение ошибки, определив предварительно передаточную функцию замкнутой системы по ошибке $W_\delta(p)$:

$$W_\delta(p) = \frac{1}{1 + W(p)},$$

где $W(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{1}{p(p+1)}$ – передаточная функция разомкнутой системы по задающему воздействию $x(t)$.

Тогда

$$W_\delta(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{p(p+1)}} = \frac{p(p+1)}{p^2 + p + 1},$$

$$\Delta(p) = W_\delta(p)X(p) = \frac{p(p+1)}{p^2 + p + 1}\frac{1}{p} = \frac{p+1}{p^2 + p + 1} = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

Для перехода от $\Delta(p)$ к оригиналу $\delta(t)$ воспользуемся теоремой разложения:

$$\delta(t) = \sum_{1}^{2} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t},$$

где p_k – корни характеристического уравнения $H(p) = p^2 + p + 1 = 0$,

$$p_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 1} = -0{,}5 \pm j0{,}87,$$

$$p_1 = -0{,}5 + j0{,}87, \quad p_2 = -0{,}5 - j0{,}87.$$

Определим $H'(p) = \dfrac{d}{dp}H(p) = \dfrac{d}{dp}(p^2 + p + 1) = 2p + 1$,

откуда

$$H'(p_1) = 2(-0{,}5 + j0{,}87) + 1 = j1{,}74,$$

$$H'(p_2) = 2(-0{,}5 - j0{,}87) + 1 = -j1{,}74.$$

Получим решение для $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \frac{0{,}5 + j0{,}87}{j1{,}74} e^{(-0{,}5+0{,}87)t} + \frac{0{,}5 - j0{,}87}{j1{,}74} e^{(-0{,}5-j0{,}78)t} =$$

$$= \frac{2}{1{,}74} e^{-0{,}5t} \frac{e^{j60^\circ} e^{j0{,}87t}}{2j} + \frac{2}{1{,}74} e^{-0{,}5t} \frac{e^{-60^\circ} e^{-j0{,}87t}}{-2j} =$$

$$= 1{,}15 e^{-0{,}5t} \frac{e^{j(0{,}87+60^\circ)t} - e^{-j(0{,}87+60^\circ)t}}{2j} = 1{,}15 e^{-0{,}5t} \sin(0{,}87t + 60^\circ).$$

Начальное значение ошибки $\delta(0) = 1{,}15 \sin 60^\circ = 1{,}15 \cdot 0{,}866 \cong 1$.

При $t \to \infty$ ошибка стремится к нулю.

На рисунке 8 изображен закон изменения ошибки $\delta(t)$.

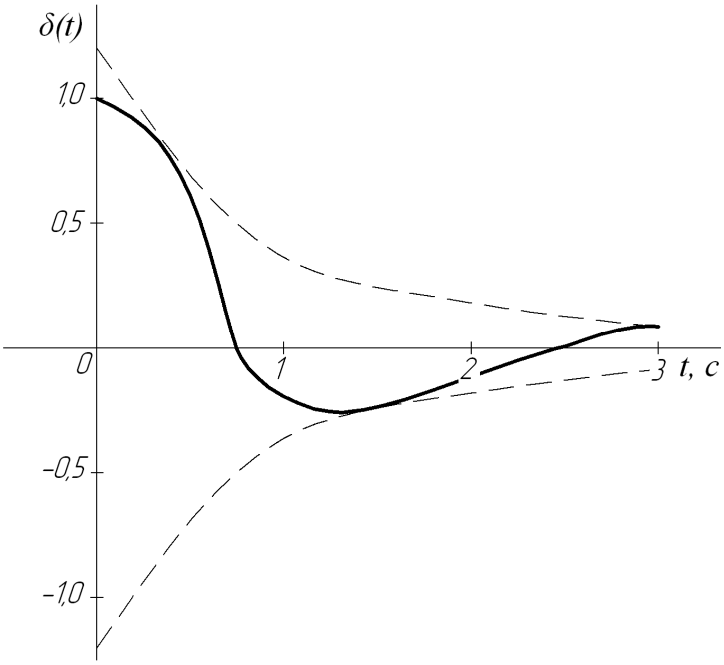

Рис. 8. Закон изменения ошибки $\delta(t)$

Задача 7

В условиях предыдущей задачи найти и построить закон изменения выходного сигнала $y(t)$ и ошибки $\delta(t)$ при ненулевых начальных условиях $y(0) = 0{,}2$; $y(0) = 0$.

Решение:

использовать формулу для определения передаточной функции уже нельзя, т.к. она справедлива только для нулевых начальных условий, поэтому найдем сначала передаточную функцию системы в замкнутом состоянии:

$$W_{зам}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)},$$

где $W(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$ – передаточная функция разомкнутой системы (см. предыдущую задачу).

Тогда

$$W_{зам}(p) = \frac{\dfrac{1}{p(p+1)}}{1 + \dfrac{1}{p(p+1)}} = \frac{1}{p^2 + p + 1}.$$

Операторное уравнение, связывающее входной и выходной сигналы замкнутой системы при нулевых начальных условиях будет таким:

$$Y(p) = (p^2 + p + 1) = X(p) .$$

С учетом ненулевых начальных условий оно запишется так:

$$p^2 Y(p) - py(0) + pY(p) - y(0) + Y(p) = X(p) ,$$

$$Y(p)(p^2 + p + 1) = X(p) + py(0) + y(0) ,$$

откуда $Y(p) = \dfrac{\dfrac{1}{p} + 0{,}2p + 1}{p^2 + p + 1} = \dfrac{0{,}2p^2 + 0{,}2p + 1}{p(p^2 + p + 1)} = \dfrac{G(p)}{H(p)}$.

Для перехода к $y(t)$ используем теорему разложения:

$$y(t) = \sum_{1}^{3} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t} .$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$H(p) = p(p^2 + p + 1) = 0 .$$

Получим: $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 - 1} = -0{,}5 \pm j0{,}87 = 1\underline{|\pm 120^\circ}$.

Тогда $H'(p_k) = \dfrac{d}{dp} H(p)|_{p=p_k} = \dfrac{d}{dp}\left[p(p^2 + p + 1)\right]|_{p=p_k} =$

$= [(p^2 + p + 1) + p(2p + 1)]|_{p=p_k}$,

откуда $H'(p_1) = 1$, $H'(p_2) = 1e^{j\cdot 120^\circ}(-1 + j1{,}74 + 1) = j1{,}74e^{j120^\circ}$,

$$H'(p_3) = 1e^{-j120^\circ}(-1 - j1{,}74 + 1) = -j1{,}74e^{-j120^\circ} .$$

Находим $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{1} e^0 + \frac{0{,}2 \cdot 1\underline{|240^\circ} + 0{,}2(-0{,}5 + j0{,}87) + 1}{j1{,}74e^{j120^\circ}} e^{(-0{,}5 + j0{,}87)t} +$$

$$+ \frac{0{,}2 \cdot 1\underline{|-240^\circ} + 0{,}2(-0{,}5 - j0{,}87) + 1}{-j1{,}74e^{-j120^\circ}} e^{(-0{,}5 - j0{,}87)t} =$$

$$= 1 + \frac{0{,}2(-0{,}5 - j0{,}87) + 0{,}2(-0{,}5 + j0{,}87) + 1}{j1{,}74e^{j120^\circ}} e^{-0{,}5t} e^{j0{,}87t} +$$

$$+ \frac{0{,}2(-0{,}5 + j0{,}87) + 0{,}2(-0{,}5 - j0{,}87) + 1}{-j1{,}74e^{-j120^\circ}} e^{-0{,}5t} e^{-j0{,}87t} =$$

$$1 + \frac{2}{1{,}74} e^{-0{,}5t} \frac{0{,}8e^{-j120^\circ} e^{j0{,}87t}}{2j} + \frac{2}{1{,}74} e^{-0{,}5t} \frac{0{,}8e^{j120^\circ} e^{-j0{,}87t}}{-2j} =$$

$$= 1 + 0{,}92e^{-0{,}5t} \frac{e^{j(0{,}87 - 120^\circ)} - e^{-j(0{,}87t - 120^\circ)}}{2j} = 1 + 0{,}92e^{-0{,}5t} \sin(0{,}87t - 120^\circ) .$$

Проверим $y(0)$, т.к. по условию задачи $y(0) = 0{,}2$:

$$y(0) = 1 + 0{,}92 \cdot 1 \cdot \sin(-120^\circ) = 1 - 0{,}92 \cdot 0{,}87 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Установившееся значение выходного сигнала $y_\infty = 1$. Решение для $\delta(t)$ найдем из соотношения:

$$\delta(t) = x(t) - y(t) = 1 - 1 - 0{,}92e^{-0{,}5t} \sin(0{,}87t - 120^\circ) =$$
$$= -0{,}92e^{-0{,}5t} \sin(0{,}87t - 120^\circ).$$

Начальное значение ошибки $\delta(t) = -0{,}92(-0{,}87) = 0{,}8$. При $t \to \infty$ ошибка стремится к 0.

На рисунке 9 изображены графики выходного сигнала $y(t)$ и ошибки $\delta(t)$. Тонкими линиями показаны вспомогательные построения.

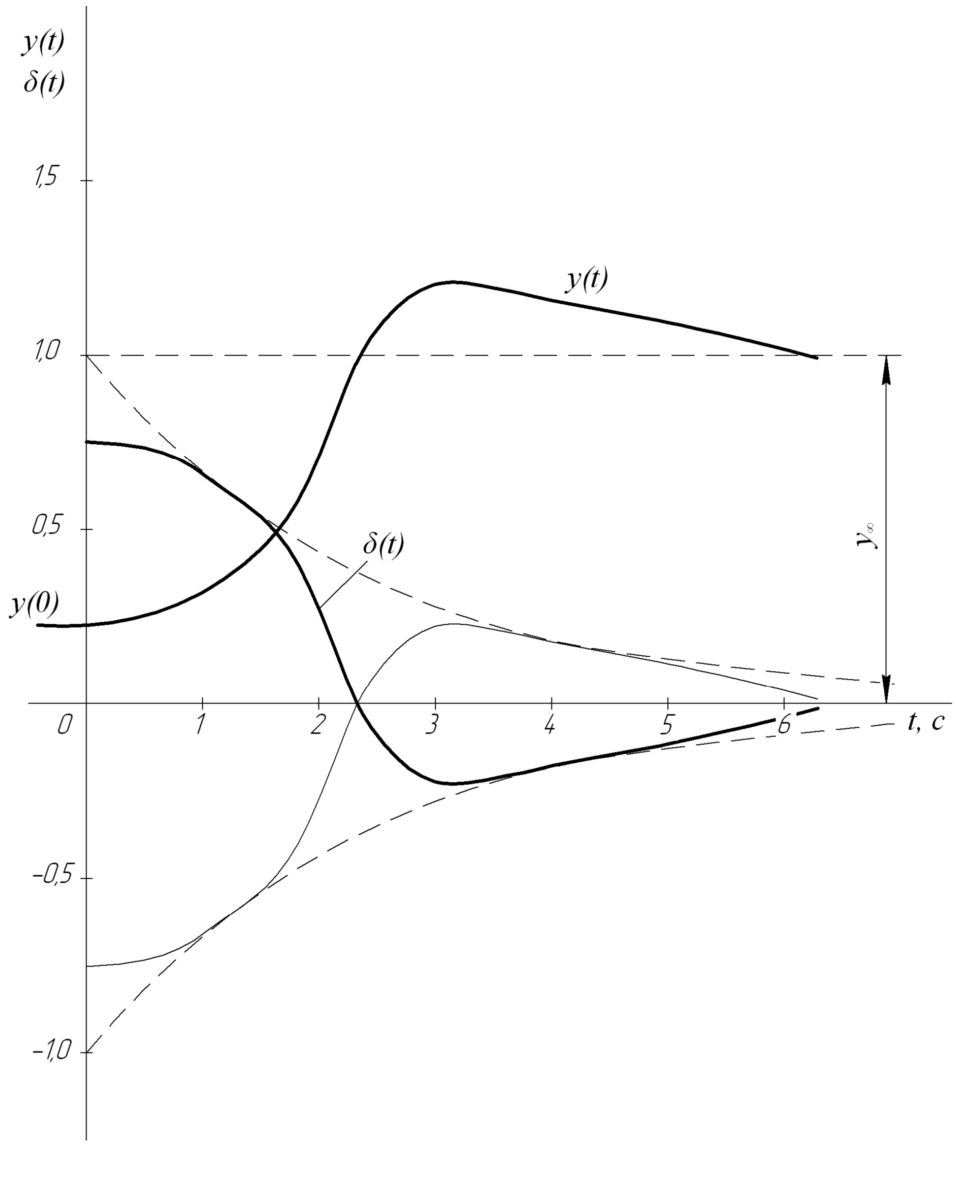

Рис. 9. График выходного сигнала $y(t)$ и ошибки $\delta(t)$

Задача 8

На рисунке 10 изображена структурная схема системы регулирования.

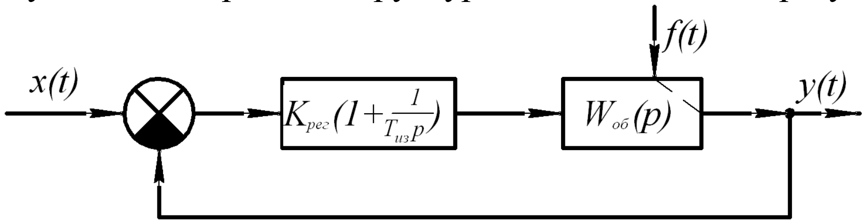

Рис. 10. Структурная схема системы регулирования

Заданы передаточная функция объекта регулирования по задающему воздействию $\underset{по\ x}{W_{об}}(p)=\dfrac{10}{p}$ и по возмущению $\underset{по\ f}{W_{об}}(p)=\dfrac{2}{p}$.

Найти и построить закон изменения выходного сигнала $y(t)$, если возмущение $f(t)=1(t)$, а параметры ПИ-регулятора $K_{рег}=20\,\text{с}^{-1}$, $T_{из}=1\,\text{с}$.

Решение:

запишем передаточную функцию замкнутой системы по возмущению.

$$\underset{по\ f}{W_{зам}}(p)=\frac{\underset{по\ f}{W_{об}}(p)}{1+\underset{по\ x}{W_{об}}(p)W_{рег}(p)}=\frac{\frac{2}{p}}{1+\frac{10}{p}20(1+\frac{1}{p})}=\frac{\frac{2}{p}}{1+\frac{200}{p}\frac{p+1}{p}}=$$

$$=\frac{2p}{p^2+200p+200}.$$

Тогда изображение выходного сигнала

$$Y(p)=\underset{по\ f}{W_{зам}}(p)F(p)=\frac{2p}{p^2+200p+200}\frac{1}{p}=\frac{2}{p^2+200p+200}=\frac{G(p)}{H(p)}.$$

С помощью теоремы разложения найдем $y(t)$:

$$y(t)=\sum_{1}^{2}\frac{G(p_k)}{H'(p_k)},$$

где p_k – корни характеристического уравнения $H(p)=0$.

Найдем их:

$$H(p)=p^2+200p+200=0,$$

откуда $p_{1,2}=-100\pm\sqrt{100^2-200}=-100\pm 99$,

$$p_1=-100-99=-199,\ p_2=-100+99=-1.$$

Тогда

$$H'(p_k)=\frac{d}{dp}(p^2+200p+200)\,|_{p=p_k}=(2p+200)\,|_{p=p_k}$$

будут равны при $p=p_1$ и $p=p_2$ соответственно:

$$H'(p_1)=2(-199)+200=-198,\ H'(p_2)=2(-1)+200=198.$$

Найдем закон изменения выходного сигнала:

$$y(t)=\frac{2}{-198}e^{-199t}+\frac{2}{198}e^{-t}=0{,}1(e^{-t}-e^{-199t})10^{-1}.$$

При $t=0$ $y(0)=0$, при $t\to\infty$ $y_\infty\to 0$.

График изменения выходного сигнала изображен на рисунке 11.

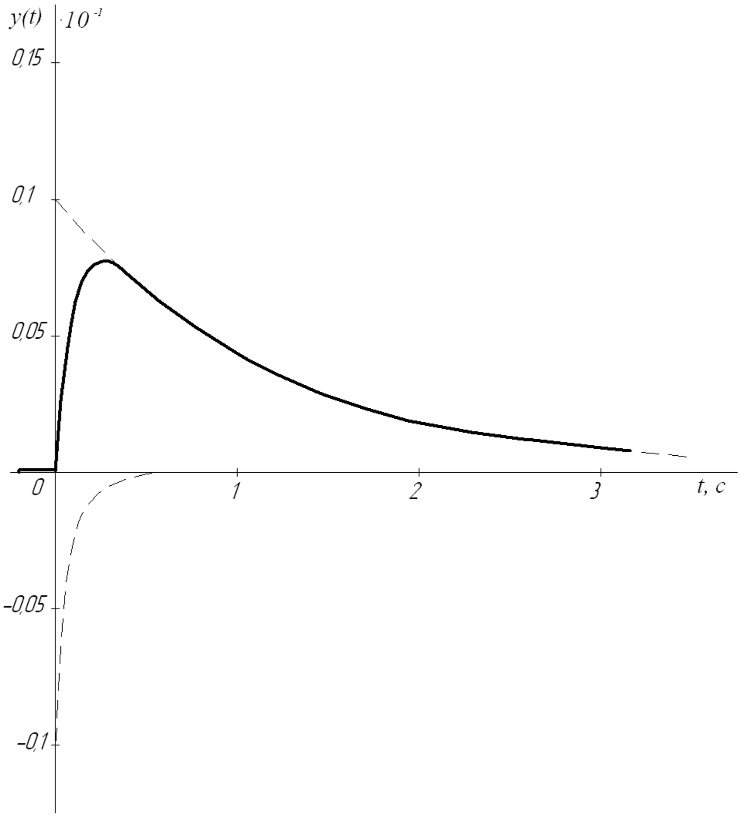

Рис. 11. График изменения выходного сигнала $y(t)$

Задача 9

Передаточная функция следящей САР имеет вид $W(p)=\dfrac{10}{(0{,}2p+1)^2}$.

Найти и построить переходную функцию $h(t)$.

Решение:

Напомним, что передаточная функция, являющаяся реакцией системы на входное воздействие $x(t)=1(t)$, определяется так:

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right].$$

В нашем случае $h(t)=L^{-1}\left[\dfrac{10}{p(0{,}2p+1)^2}\right]$.

Для нахождения оригинала применить теорему разложения нельзя, т.к. в этом случае наряду с $p_1=0$ есть кратные корни $p_{2,3}=-5$.

Для перехода от изображения к оригиналу следует использовать табличный оператор: $\frac{1}{(p+a)^2} = te^{-at}$.

Тогда изображение функции $h(t)$ можно представить так:

$$h(t) = \frac{1}{p}\frac{10}{0{,}04\left(p+\frac{1}{0{,}2}\right)^2} = \frac{F(p)}{p}.$$

Наличие p в знаменателе говорит о том, что после нахождения оригинала $f(t)$, соответствующего изображению $F(p)$, для вычисления $h(t)$ необходимо взять интеграл от $f(t)$.

$$F(p) = \frac{10}{0{,}04\left(p+\frac{1}{0{,}2}\right)^2} = \frac{250}{(p+5)^2} = 250te^{-5t}$$

Тогда $h(t) = \int\limits_0^t 250te^{-5t}dt$.

$$h(t) = \int\limits_0^t \underbrace{250t}_{u}\underbrace{e^{-5t}dt}_{dv} = uv/_0^t - \int\limits_0^t vdu = (-50te^{-5t} - 10^{-5t}) = 10(1-e^{-5t}) - 50te^{-5t}$$

На рисунке 12 представлен график изменения переходной функции $h(t)$. Тонкими линиями изображены составляющие сигнала.

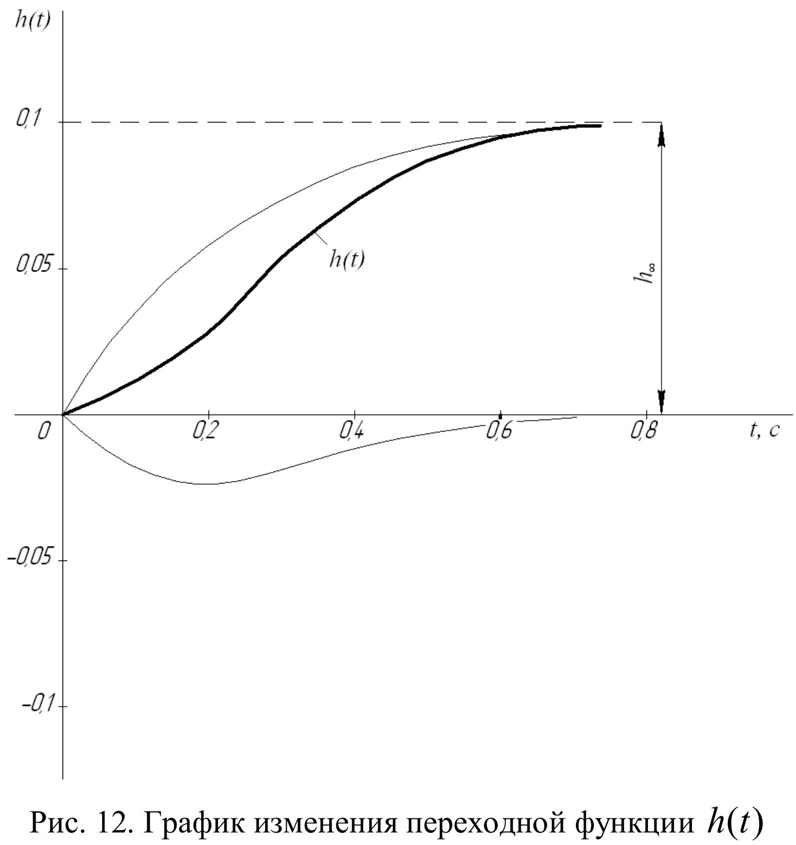

Рис. 12. График изменения переходной функции $h(t)$

Список рекомендуемой литературы

1. Гальперин, М.В. Автоматическое управление [Текст] / М.В. Гальперин. – М.: ИНФА-М: ФОРУМ, 2007.
2. Ким, Д.П. Теория автоматического управления [Текст] / Д.П. Ким. Т. 1. – М.: Физматлит, 2003.
3. Лукас, В.А. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов] / В.А. Лукас. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 2004.
4. Ким, Д.П. Сборник задач по теории автоматического регулирования. Линейные системы [Текст] / Д.П. Ким, Н.Д. Дмитриева. – М.: Физматлит, 2007.
5. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов]. В 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Теория автоматического управления [Текст]: учебн. [для вузов]. В 2 ч. / под ред. В.А. Нетушила. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1976.
7. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления [Текст]: учеб. пособие [для вузов] / под ред. В.А. Бесекерского. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1978.