Электронный архив УГЛТУ

Е. И. Стенина

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Однофакторный эксперимент

Екатеринбург
2020

Электронный архив УГЛТУ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский государственный лесотехнический университет»
(УГЛТУ)

Кафедра автоматизации и инновационных технологий

Е. И. Стенина

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Однофакторный эксперимент

Методические указания по выполнению практических,
лабораторных и исследовательских работ обучающимися
по направлению 35.03.02 «Технология лесозаготовительных
и деревоперерабатывающих производств»
всех форм обучения

Екатеринбург
2020

Электронный архив УГЛТУ

Печатается по рекомендации методической комиссии ИЛБ ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет».
Протокол № 2 от 03 октября 2019 г.

Рецензент – профессор кафедры АИТ, д-р техн. наук Гороховский А. Г.

Редактор Е. Л. Михайлова
Оператор компьютерной верстки Т. В. Упорова

Подписано в печать 07.04.20		Поз. 17
Плоская печать	Формат 60×84/16	Тираж 10 экз.
Заказ №	Печ. л. 1,39	Цена руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Сектор оперативной полиграфии УГЛТУ

Электронный архив УГЛТУ

ВВЕДЕНИЕ

Научно-технический прогресс на современном этапе развития общества характеризуется гигантскими темпами накопления научных знаний, позволяющих человеку воздействовать на окружающую среду для получения материальных и духовных благ. Внедрение научных достижений в производство позволяет повысить производительность труда, снизить себестоимость продукции, повысить ее качество, улучшить эксплуатационные показатели. Таким образом, наука превратилась в непосредственную производительную силу. С возрастанием роли науки во много раз повышаются требования к ее эффективности.

Современное производство требует от специалиста умения самостоятельно ставить и решать различные принципиально новые задачи. Этого нельзя достичь без овладения основами научных исследований. В лесной и деревообрабатывающей промышленности исследования проводят зачастую с целью отыскания выгодных условий протекания процессов, оптимальных режимов работы и параметров машин и механизмов при их модернизации, а также состава многокомпонентных систем, оптимального размещения предприятий и их рациональной структуры в зависимости от района расположения и т. п.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Методические указания предназначены для приобретения обучающимися практических навыков в планировании и проведении однофакторных экспериментов с использованием математической теории планирования эксперимента, а также статистической обработки и анализа полученных данных.

2. ПОНЯТИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Эксперимент – это совокупность опытов, позволяющая установить влияние воздействующих факторов x_i на выходные параметры объекта исследования y_i (рис. 1).

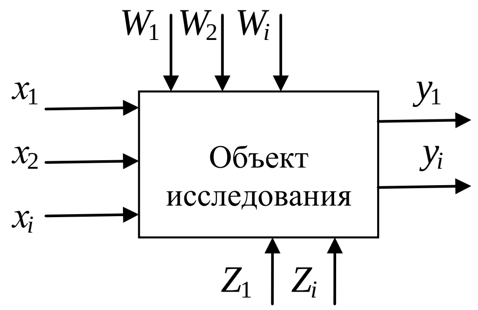

Рис. 1. Схема эксперимента

Электронный архив УГЛТУ

Фактор – это измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение (температура, давление, количество циклов и т. п.).

Постоянными называются факторы, не меняющие своего значения в пределах всего эксперимента (W_i, Z_i).

Переменным (варьируемым) называется фактор x_i, значение которого меняется от опыта к опыту. Каждое значение, принимаемое фактором в опыте, называется уровнем переменного фактора. Диапазон изменения (варьирования) переменных факторов ограничен верхним и нижним уровнями.

Выходным параметром называется результат эксперимента y_i, который является случайной величиной, так как всегда в большей или меньшей степени содержит ошибки, обусловленные погрешностью приборов, измерений, расчетов и т.п.

Опыт – часть эксперимента, выполненная при определенных значениях одного или нескольких факторов. С целью снижения вероятности ошибки при анализе результатов эксперимента необходимо дублирование каждого опыта.

Любое экспериментальное исследование условно можно разделить на три этапа: подготовка эксперимента, планирование и постановка опытов, обработка результатов измерений и их анализ.

Традиционным методом планирования исследования является однофакторный эксперимент, когда изучается воздействие на рассматриваемый объект только одного переменного фактора.

Однофакторный эксперимент нагляден, результаты эксперимента можно прогнозировать, экспериментатор, хорошо «чувствующий» объект, легко заметит ошибку, вкравшуюся в экспериментальные данные, и примет необходимые меры.

3. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

3.1. Установить факторы, влияющие на исследуемый объект.
3.2. Выявить и обосновать постоянные и переменный факторы исследуемого процесса.
3.3. Обосновать уровни варьирования переменного фактора.
3.4. Выбрать выходной параметр процесса.
3.5. Построить методическую сетку проведения эксперимента (табл. 1).
3.6. Провести эксперимент и свести первичные результаты опытов в табл. 2.
3.7. Статистически обработать полученные экспериментальные данные.
3.8. Проанализировать результаты эксперимента.

Электронный архив УГЛТУ

Таблица 1

Пример методической сетки эксперимента

Фактор	Значение
Постоянные факторы	
Порода древесины	Сосна
Шероховатость по ГОСТ 7016-82, мкм	Не ниже 32
Влажность, %	9…12
Температура среды, °с	20±2
Способ антисептирования	Капиллярный (нанесение кистью)
Продолжительность выдержки между нанесениями, мин	20
Переменный фактор	
Кратность нанесений	1, 2, 3

Таблица 2

Пример оформления первичных результатов эксперимента

№ образца	Размеры образцов, см		Масса образцов, г		Удержание, г/м^2
	a	*b*	до пропитки, m_1	после пропитки, m_2	
1-е нанесение					
1	5,57	4,07	30,58	30,84	115,30
2	5,80	4,07	31,03	31,21	74,04
3	5,65	4,08	24,23	24,50	119,22
4	5,73	4,07	26,15	26,47	138,82
5	5,80	4,06	33,97	34,12	65,30
2-е нанесение					
1	5,57	4,07	30,58	30,92	151,28
2	5,80	4,07	31,03	31,32	120,58
3	5,65	4,08	24,23	24,65	181,44
4	5,73	4,07	26,15	26,63	206,52
5	5,80	4,06	33,97	34,21	104,74
3-е нанесение					
1	5,57	4,07	30,58	31,01	188,71
2	5,80	4,07	31,03	31,40	154,27
3	5,65	4,08	24,23	24,68	194,52
4	5,73	4,07	26,15	26,70	236,58
5	5,80	4,06	33,97	34,28	134,59

Электронный архив УГЛТУ

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Математическая статистика – это наука о математических методах обработки, систематизации и использовании результатов наблюдений для научных и практических выводов.

Множество значений результатов экспериментов (случайных величин), полученных в продублированных опытах, представляет собой статистическую совокупность.

Статистическая совокупность, содержащая в себе всевозможные значения случайной величины, называется генеральной статистической совокупностью.

Выборочной статистической совокупностью (или выборкой) называется совокупность, в которой содержится только некоторая часть элементов генеральной совокупности. По результатам экспериментов практически всегда сталкиваются с выборочной, а не с генеральной совокупностью.

Число значений выходной величины, содержащихся в выборке, называют объёмом выборки.

При обработке результатов эксперимента (выборки) необходимо:

- исключить грубые ошибки из ряда полученных данных (п. 4.1);
- вычислить необходимые статистические характеристики выборок (п. 4.2);
- проверить нормальность распределения случайных величин в выборках (п. 4.3);
- проверить значимость разницы между статистическими характеристиками различных опытов (п. 4.4);
- проверить коррелируемость переменного и выходного факторов (п. 4.5);
- проанализировать результаты экспериментов.

Расчеты должны оформляться в соответствии с требованиями ЕСКД.

4.1. Отбрасывание грубых наблюдений

Грубые наблюдения (промахи) возникают в результате грубых методических ошибок при постановке и проведении опыта, поэтому их необходимо из выборки исключить. Промах по абсолютной величине существенно отличается от остальных результатов опыта, т. е. принимает максимальное или минимальное значение в числовом ряду выборки.

Для проверки предположения, является ли сомнительный результат y_i промахом или нет, его временно исключают из выборки, и по оставшимся значениям выходной величины (наблюдениям) определяют среднее выборочное $\overline{y}$ и оценку выборочной дисперсии S^2.

Электронный архив УГЛТУ

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \tag{1}$$

где y_i – оставшиеся наблюдения выборки;

n – объем изменившейся выборки.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2}{n-1}. \tag{2}$$

В случае, когда в выборке содержатся величины с большим абсолютным значением, лучше для расчета выборочной дисперсии использовать формулу

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}. \tag{3}$$

Затем рассчитывают критерий Стьюдента $t_{расч}$:

$$t_{расч} = \frac{\left|y_i - \bar{y}\right|}{S}, \tag{4}$$

где y_i – проверяемый результат;

S – выборочное стандартное отклонение.

$$S = \sqrt{S^2}, \tag{5}$$

где S^2 – выборочная дисперсия.

Из табл. 1 распределения Стьюдента (приложение) по уровню значимости q (в деревообработке принимается равным 0,05) и числу степеней свободы $f = n - 1$ находят $t_{табл}$. Если $t_{расч} > t_{табл}$, то сомнительный результат является промахом и должен быть исключен из выборки. После этого исследуют следующий за ним сомнительный результат и т. д.

Пример

По результатам дублированных опытов первого эксперимента (см. табл. 2) были получены следующие значения удержания защитного средства на поверхности сосновых образцов, г/м^2: 115,30; 74,04; 119,22; 138,82; 65,3.

В полученной выборке подозрение вызывает y_i = 138,82 г/м^2. Этот результат временно исключаем из выборки и для оставшихся 4 значений находим

$$\bar{y} = \frac{115{,}30 + 74{,}04 + 119{,}22 + 65{,}30}{4} = 93{,}47 \text{ г/м}^2,$$

$$S^2 = \frac{115{,}30^2 + 74{,}04^2 + 119{,}22^2 + 65{,}30^2 - 4 \times 93{,}47^2}{3} = 770{,}32 \text{ г/м}^2.$$

Электронный архив УГЛТУ

Или

$$S^2 = \frac{(115{,}30-93{,}47)^2+(74{,}04-93{,}47)^2+(119{,}22-93{,}47)^2+(65{,}30-93{,}47)^2}{3} = 770{,}32 \text{ г/м}^2,$$

$$S = \sqrt{770{,}32} = 27{,}75 \text{ г/м}^2,$$

$$t_{расч} = \frac{|138{,}82 - 93{,}47|}{27{,}75} = 1{,}97,$$

$$t_{табл} = 3{,}18 \quad \text{для } f = 4 - 1 = 3 \text{ и } q = 0{,}05.$$

$t_{расч} < t_{табл}$, следовательно, проверяемый результат не является промахом и должен быть возвращен в выборку. В целом можно сделать вывод о том, что исследуемая выборка не содержит промахи. Результаты расчетов заносим в табл. 3.

Таблица 3

Результаты проверки на промахи

Удержание, г/м^2	Среднее выборочное $\bar{y}$, г/м^2	Выборочная дисперсия S^2, г/м^2	Выборочное стандартное отклонение S, г/м^2	Значение критерия Стьюдента	
				расчетное $t_{расч}$	табличное $t_{табл}$
1-е нанесение					
115,30					
74,04					
119,22					
138,82	93,47	770,32	27,75	1,63	3,18
65,30	111,85	741,14	27,22	1,71	3,18
2-е нанесение					
151,28					
120,58					
181,44					
206,52	139,51	1154,65	33,98	1,97	3,18
104,74	164,96	1385,18	37,21	1,62	3,18
3-е нанесение					
191,97	135,07	908,17	30,14	2,48	3,18
280,10	***172,74***	***2421,85***	***49,22***	***4,67***	***3,18***
113,76	174,17	633,63	25,17	2,63	3,18
156,38					
228,86	***154,03***	***1533,58***	***39,16***	***3,25***	***3,18***

Примечание. Жирным курсивом выделены промахи.

Электронный архив УГЛТУ

4.2. Расчет необходимых статистических характеристик выборок

4.2.1. Расчет среднего арифметического

Самым известным вошедшим в практику вариационно-статистическим элементом, характеризующим нормальный вариационный ряд, является среднее выборочное, или просто «среднее», которое рассчитывается по формуле (1). Найденное $\bar{y}$ называют также оценкой математического ожидания, или выборочным средним, в отличие от генерального среднего (или математического ожидания), которое можно найти из генеральной совокупности.

Пример

Так как исследуемая выборка первого опыта не содержала промахов, то расчет производим для всех 5 случайных величин (см. табл. 3).

$$\bar{y} = \frac{115{,}30 + 74{,}04 + 119{,}22 + 138{,}82 + 65{,}30}{5} = 102{,}54 \text{ г/м}^2.$$

4.2.2. Расчет выборочного стандартного отклонения

Количественной оценкой величины случайных ошибок исследования являются выборочные стандартные отклонения (выборочный стандарт) S, а также выборочная дисперсия S^2, которые выражаются в единицах того же наименования, что и среднее арифметическое.

Выборочная дисперсия рассчитывается для «чистой» выборки по формуле (2) или (3), а выборочный стандарт – по формуле (4).

Пример

$$S^2 = \frac{115{,}30^2 + 74{,}04^2 + 119{,}22^2 + 138{,}82^2 + 65{,}30^2 - 5 \times 102{,}54^2}{4} = 988{,}69 \text{ г/м}^2,$$

$$S = \sqrt{988{,}68} = 31{,}44 \text{ г/м}^2.$$

Основные характеристики выборок приводятся в табл. 4.

Электронный архив УГЛТУ

Таблица 4

Основные статистические показатели выборок

Удержание, г/м^2	Среднее арифметическое выборки $\bar{y}$	Выборочная дисперсия S^2	Стандартное выборочное отклонение S	Объем выборки n
1-е нанесение				
115,30	102,54	988,69	31,44	5
74,04				
119,22				
138,82				
65,30				
2-е нанесение				
151,28	152,91	1764,16	42,00	5
120,58				
181,44				
206,52				
104,74				
3-е нанесение				
191,97	154,03	1533,58	39,16	3
113,76				
156,38				

4.2.3. Расчет коэффициента вариации

При решении вопроса об изменчивости того или иного свойства необходимо вычислить коэффициент вариации v, который характеризует относительное рассеивание случайной величины от выборочного среднего:

$$v = \frac{S}{\bar{y}} 100\,\%. \tag{6}$$

Пример

$$v = \frac{31,44}{102,54}\,100 = 30,67.$$

4.2.4. Расчет средней квадратической ошибки выборочного среднего

Величину среднего арифметического всегда находят из сравнительно небольшого количества наблюдений, так как измерить все отдельные значения интересующего свойства невозможно и не нужно. Поэтому

Электронный архив УГЛТУ

необходимо иметь дополнительную характеристику, которая позволила бы по частному значению среднего арифметического судить об общей величине среднего арифметического изучаемого свойства. Такого рода характеристикой является средняя квадратическая ошибка среднего арифметического:

$$S_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \qquad (7)$$

Зная среднее арифметическое и его среднюю квадратическую ошибку, можно судить о надежности полученной средней величины изучаемого признака.

Пример

$$S_{\bar{y}} = \frac{31{,}44}{\sqrt{5}} = 14{,}06.$$

4.2.5. Расчет показателя точности среднего значения

Подобно вариационному коэффициенту средняя квадратическая ошибка может быть выражена в процентах от соответствующего ей среднего арифметического. Полученная величина называется показателем точности среднего значения:

$$\xi = \frac{S_{\bar{y}}}{y}100. \qquad (8)$$

Чем меньше показатель точности, тем надежнее результаты исследования. Принято считать, что в области лесной и деревообрабатывающей промышленности достаточная надежность будет обеспечена только в том случае, если показатель точности не превышает 5 %.

Пример

$$\xi = \frac{14,06}{102,54}100 = 13,71\%.$$

Полученный показатель точности превышает 5 %, следовательно, можно сделать вывод о том, что результаты исследования недостаточно надежны. Для повышения их надежности необходимо увеличить объем выборки.

Электронный архив УГЛТУ

4.2.6. Расчет доверительного интервала для математического ожидания

Выборочное среднее арифметическое $\bar{y}$ представляет ценность постольку, поскольку по нему можно судить об истинном среднем, генеральном среднем, или математическом ожидании M_y. Представляет интерес отыскание величины максимальной ошибки Δ, которую допускают, предполагая, что $M_y = \bar{y}$. Поэтому требуется найти величину Δ, при которой выполняется условие

$$\bar{y} - \Delta \le M_y \le \bar{y} + \Delta, \tag{9}$$

$$\Delta = \frac{t_{табл} S}{\sqrt{n}}. \tag{10}$$

Пример

Для уровня значимости q = 0,05 и числа степеней свободы f = 5–1 = 4 $t_{табл}$ = 2,78 (табл. 1 приложения):

$$\Delta = \frac{2{,}78 \times 31{,}44}{\sqrt{5}} = 39{,}09,$$

$$102{,}54 - 39{,}09 \le M_y \le 102{,}54 + 39{,}09,$$

$$63{,}45 \text{ г/м}^2 \le M_y \le 141{,}63 \text{ г/м}^2.$$

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что истинное среднее значение удержания защитного средства на сосновой древесине при однократном нанесении находится в пределах от 63,45 до 141,63 г/м^2.

4.3. Проверка нормальности распределения

В случае, когда изменчивость случайной величины вызвана её зависимостью от большого числа сравнительно незначительных и взаимно независимых факторов, делается вывод о том, что выборка этих величин подчиняется закону нормального распределения.

Приближённая проверка нормальности распределения проводится при помощи показателей асимметрии A и эксцесса E, рассчитываемых по формулам

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^3}{n S^3}, \tag{11}$$

Электронный архив УГЛТУ

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)^4}{n S^4} - 3. \tag{12}$$

Далее вычисляют среднее квадратическое отклонение для асимметрии σ_A и эксцесса σ_E по формулам

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}, \tag{13}$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2 (n+3)(n+5)}}. \tag{14}$$

Далее проверяют выполнение одновременно двух условий

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{A}{\sigma_A}\right| \le 2 \\ \left|\frac{E}{\sigma_E}\right| \le 2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если хотя бы один из показателей *A* или *E* по абсолютной величине в 2 или более раз превосходит соответствующее квадратическое отклонение, т.е. не выполняется хотя бы одно из приведенных условий, то следует усомниться в нормальности распределения случайной величины и тогда необходимо осуществить более точную процедуру проверки данной гипотезы с помощью критерия Пирсона. Если подтвердится отрицательный результат, то проведение дальнейших статистических процедур невозможно, а значит, невозможно получить достаточно достоверные выводы на основании данных результатов эксперимента.

Пример

Проводим проверку нормальности распределения выходной величины (удержания, г/м^2) в первой выборке при одном нанесении защитного средства (см. табл. 4):

$$A = \frac{\left(115{,}30-102{,}54\right)^3 + \left(74{,}04-102{,}54\right)^3 + \left(119{,}22-102{,}54\right)^3 + \left(138{,}82-102{,}54\right)^3 + \left(65{,}30-102{,}54\right)^3}{5 \cdot 31{,}44^3},$$

$A = –0,13$,

$$E = \frac{\left(115{,}30-102{,}54\right)^4 + \left(74{,}04-102{,}54\right)^4 + \left(119{,}22-102{,}54\right)^4 + \left(138{,}82-102{,}54\right)^4 + \left(65{,}30-102{,}54\right)^4}{5 \cdot 31{,}44^4} - 3,$$

$E = –1,10$,

Электронный архив УГЛТУ

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(5-1)}{(5+1)(5+3)}} = 0{,}71,$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24\cdot 5(5-2)(5-3)}{(5-1)^2(5+3)(5+5)}} = 0{,}56,$$

$$\frac{A}{\sigma_A} = \frac{0{,}13}{0{,}71} = 0{,}18 < 2,$$

$$\frac{E}{\sigma_E} = \frac{1{,}10}{0{,}56} = 1{,}96 < 2.$$

Следовательно, распределение случайных величин в выборке подчиняется нормальному закону.

4.4. Проверка значимости разницы между статистическими характеристиками различных опытов

4.4.1. Проверка гипотезы об однородности дисперсий

Выборочные дисперсии S_i^2, являющиеся характеристиками выборок, называются однородными, если они являются оценками одной и той же генеральной дисперсии, а различие между ними объясняется влиянием случайных ошибок. В противном случае различие между выборочными дисперсиями значимо.

а) **если $\boldsymbol{n_1 = n_2 = n_i}$,** то рассчитывают *G*-критерий Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^{m} S_i^2}, \tag{16}$$

где m – количество выборочных дисперсий, однородность которых проверяется;

$S_{\max}^2$ – наибольшая по абсолютной величине дисперсия;

S_i^2 – проверяемые дисперсии.

Далее по уровню значимости q = 0,05, числу степеней свободы выборок $f = n - 1$ и по количеству выборок m из табл. 2 приложения находят величину $G_{табл}$. Если $G_{расч} < G_{табл}$, то можно принять гипотезу об однородности дисперсий. В противном случае она отвергается;

б) **если $\boldsymbol{n_1 \neq n_2}$ и сравнивается 2 выборки**, то рассчитывается критерий Фишера по следующей формуле:

$$F_{расч} = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}, \tag{17}$$

Электронный архив УГЛТУ

где $S^2_{\max}$ – наибольшая по абсолютному значению дисперсия;

$S^2_{\min}$ – наименьшая по абсолютному значению дисперсия.

Далее для уровня значимости q и числа степеней свободы дисперсий $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$ из таблицы распределения Фишера (табл. 3 приложения) находят величину $F_{табл}$. Если $F_{расч} \le F_{табл}$, то гипотеза об однородности дисперсий принимается;

в) **если $n_1 \neq n_i$ и сравнивается более двух выборок**, то рассчитывается критерий Бартлетта.

Предварительно вычисляют величину дисперсии воспроизводимости S^2_y по формуле

$$S^2_y = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i S_i^2}{\sum_{i=1}^{m} f_i}, \qquad (18)$$

где m – число проверяемых дисперсий;

f_i – число степеней свободы соответствующих дисперсий, $f_i = n_i - 1$.

Далее рассчитывают величину B:

$$B = \frac{V}{C}, \qquad (19)$$

$$V = 2{,}303\left[\left(\sum_{i=1}^{m} f_i\right)\lg S^2_y - \sum_{i=1}^{m} f_i \lg S_i^2\right], \qquad (20)$$

$$C = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{f_i} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} f_i}}{3(m-1)}. \qquad (21)$$

Затем из таблиц распределения Пирсона (табл. 4 приложения) при уровне значимости q = 0,05 и числе степеней свободы $k = m - 1$ (где m – количество сравниваемых выборок) отыскивают значение $\chi^2_{табл}$. Если $B \le \chi^2_{табл}$, то дисперсии однородны.

Пример

Объемы сравниваемых трех выборок не равны (см. табл. 4), поэтому для проверки используем критерий Пирсона:

$$S^2_y = \frac{4 \cdot 988{,}69 + 4 \cdot 1764{,}16 + 2 \cdot 1533{,}58}{4 + 4 + 2} = 1407{,}86,$$

Электронный архив УГЛТУ

V = 2,303 [(4+4+2) lg 1407,86 – (4lg 988,69 + 4lg 1764,16 + 2lg 1533,58)] = 0,299,

$$C = 1 + \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4+4+2}}{3(3-1)} = 1{,}15,$$

$$B = \frac{0{,}299}{1{,}15} = 0{,}26.$$

Из табл. 4 приложения для уровня значимости q = 0,05 и числа степеней свободы выборок k = 3 – 1 критерий Пирсона $\chi^2_{табл}$ = 5,99.

Так как $B < \chi^2_{табл}$, то можно принять гипотезу об однородности дисперсий, т.е. различие между ними объясняется влиянием лишь случайных ошибок.

4.4.2. Проверка однородности средних выборочных

Данная процедура позволяет установить, вызвано ли расхождение между средними арифметическими выборок случайными ошибками измерения или оно связано с влиянием каких-либо неслучайных факторов. Проверка производится с применением t-критерия Стьюдента.

а) **если дисперсии однородны и $n_1 \neq n_i$**, то расчетный критерий Стьюдента определяется по формуле

$$t_{расч} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left[\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right]}}. \qquad (22)$$

Табличное значение $t_{табл}$ находят из табл. 1 распределения Стьюдента для уровня значимости q = 0,05 и числа степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$ (см. приложение). Если $t_{расч} > t_{табл}$, то расхождение между средними значимо. В противном случае принимают гипотезу об однородности средних арифметических;

б) **если дисперсии однородны и $n_1 = n_i$**, то $t_{расч}$ определяют по формуле

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{y_1} - \overline{y_2}\right|}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{n}}}, \qquad (23)$$

Электронный архив УГЛТУ

в) **если дисперсии неоднородны и $\boldsymbol{n_1 \neq n_i}$**, то $t_{расч}$ определяют по формуле

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{y_1} - \overline{y_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{24}$$

Число степеней свободы в этом случае определяют по формуле

$$f = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2. \tag{25}$$

Пример

Учитывая, что предыдущая проверка (см. п. 4.4.1) подтвердила гипотезу об однородности дисперсий сравниваемых выборок (см. табл. 4), рассчитываем критерий Стьюдента по формуле, используя наибольшее и наименьшее из трех средних выборочных и соответствующие им дисперсии и объемы:

$$t_{расч} = \frac{|154,03 - 102,54|}{\sqrt{(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})\left[\dfrac{(3-1)\ 1533,58 + (5-1)\ 988,69}{3+5-2}\right]}} = 2,07.$$

Для уровня значимости q = 0,05 и числа степеней свободы $f = 3+5-2$ (см. табл. 1 приложения) $t_{табл} = 2{,}45$. Так как $t_{расч} < t_{табл}$, то принимаем гипотезу об однородности средних, т. е. расхождение между ними незначимо и вызвано лишь наличием случайных ошибок измерения.

4.5. Расчет коэффициента корреляции

Если между входными x и выходными y случайными величинами имеется статистическая связь, то при изменении одной из них меняется распределение другой. В этом случае говорят, что две случайные величины x и y находятся в *корреляционной* зависимости. Для оценки статистической связи по данным эксперимента широко используется выборочный коэффициент корреляции, который рассчитывается по формуле

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{\left(n-1\right)S_x S_y}. \tag{26}$$

Электронный архив УГЛТУ

Если $0 < r_{xy} \le 1$, то можно предполагать, что с возрастанием входной случайной величины выходная в среднем тоже возрастает, т. е. зависимость прямая. При $-1 \le r_{xy} < 0$ существует обратная линейная зависимость между данными случайными величинами. Чем ближе величина коэффициента корреляции к +1 или –1, тем больше степень линейной зависимости между рассматриваемыми случайными величинами. $r_{xy} = 0$ свидетельствует об отсутствии линейной статистической связи между x и y, а случайные величины являются некоррелированными.

Для решения вопроса о коррелируемости признаков x и y вычисляют критерий Стьюдента:

$$t_{расч} = \left| r_{xy} \right| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}}. \tag{27}$$

Если $t_{расч} \ge t_{табл}$, то принимается гипотеза о значимости r_{xy}, т. е. между x и y существует линейная статистическая связь. Табличное значение критерия Стьюдента $t_{табл}$ определяется для уровня значимости $q = 0{,}05$ и числа степеней свободы $f = n - 2$.

Пример

Результаты экспериментов после статистической обработки можно представить в виде табл. 5.

Таблица 5

Сводная таблица результатов эксперимента

Количество нанесений защитного средства, шт.	x	1	2	3
Величина удержания, г/м^2	y	102,54	152,91	154,03

$$\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2,$$

$$\bar{y} = \frac{102{,}54+152{,}91+154{,}03}{3} = 136{,}49,$$

$$S_x^2 = \frac{1^2+2^2+3^2-3\times 2^2}{2} = 1,$$

$$S_y^2 = \frac{102{,}54^2+152{,}91^2+154{,}03^2-3\times 136{,}49^2}{2} = 866{,}3,$$

$$S_x = \sqrt{1} = 1,$$

$$S_y = \sqrt{866{,}3} = 29{,}43,$$

Электронный архив УГЛТУ

$$r_{yx} = \frac{(1-2)\ (102,54-136,49)+(2-2)\ (152,91-136,49)+(3-2)\ (154,03-136,49)}{(3-1)\ 1\cdot 29,43} = 0,88,$$

$$t_{расч} = |0,88|\sqrt{\frac{3-2}{1-0,88^2}} = 3,83\,.$$

Для уровня значимости q = 0,05 и числа степеней свободы f = 3 – 2 $t_{табл}$ = 12,71. $t_{расч} \le t_{табл}$, следовательно, отвергается гипотеза о значимости r_{xy}, т. е. между x и y существует нелинейная статистическая связь. Так как коэффициент корреляции принимает положительное значение (r_{xy} = 0,88), то зависимость между x и y прямая.

4.6. Анализ результатов эксперимента

На основании проведенной статистической обработки результатов экспериментов можно сделать следующие выводы:

1) максимальное удержание (154,03 г/м^2) достигнуто при трехкратном нанесении кистью защитного препарата на сосновую древесину влажностью 9–12 % при температуре среды 20 °С и 20-минутной выдержке между нанесениями;

2) зависимость между кратностью нанесения защитного средства и величиной удержания прямая и нелинейная, так как коэффициент корреляции r_{xy} = 0,88 (рис. 2).

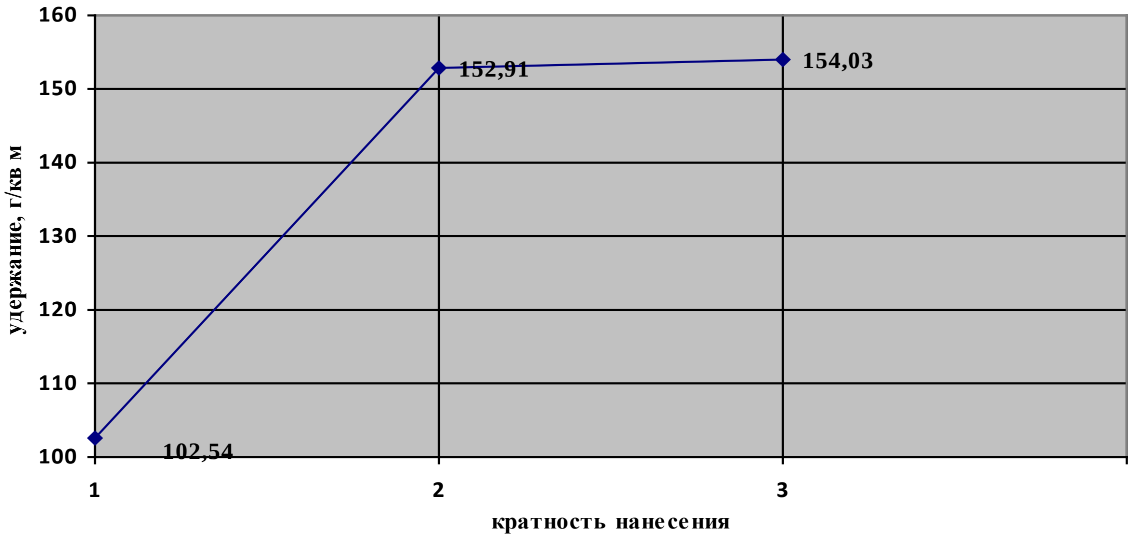

Рис. 2. График зависимости величины удержания от кратности нанесения защитного средства

Электронный архив УГЛТУ

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Пижурин, А. А. Основы научных исследований в деревообработке : учебник для студентов вузов, обучающихся по дневной и заоч. форме специальностей 250403 (260200) «Технология деревообработки» и 150405 (170400) «Машины и оборудование лесного комплекса» / А. А. Пижурин, А. А. Пижурин ; Моск. гос. ун-т леса. – М. : МГУЛ, 2005. – 305 с.

2. Пижурин, А. А. Научные исследования в деревообработке: Основы научных исследований : текст лекций : для студентов специальностей 2602.00 и 1704.00 / А. А. Пижурин ; [ред. Е. Г. Петрова] ; Моск. гос. ун-т леса. – М. : МГУЛ, 1999. – 103 с.

Электронный архив УГЛТУ

Приложение

Таблица 1

Значения t-критерия Стьюдента
(q – уровень значимости, f – число степеней свободы)

f	q	q
	0,05	0,01
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
15	2,13	2,95
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
60	2,00	2,66
80	1,99	2,64
100	1,98	2,63
120	1,98	2,62
200	1,97	2,60
500	1,96	2,59
∞	1,96	2,58

Электронный архив УГЛТУ

Таблица 2

Значения G-критерия Кохрена
(f – число степеней свободы выборки, m – количество выборок)

m	f									
	q = 0,05									
	1	2	3	4	5	10	16	36	144	∞
2	0,99	0,98	0,94	0,91	0,88	0,79	0,73	0,66	0,58	0,50
3	0,97	0,87	0,80	0,75	0,71	0,60	0,55	0,47	0,40	0,33
4	0,91	0,77	0,68	0,63	0,59	0,49	0,44	0,37	0,31	0,25
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,51	0,41	0,36	0,31	0,25	0,20
6	0,78	0,62	0,53	0,48	0,44	0,36	0,31	0,26	0,21	0,17
7	0,73	0,56	0,48	0,43	0,40	0,32	0,28	0,23	0,18	0,14
60	0,17	0,11	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
120	0,10	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01
q = 0,01										
2	0,99	0,99	0,98	0,96	0,94	0,85	0,79	0,71	0,61	0,50
3	0,99	0,94	0,88	0,83	0,79	0,67	0,61	0,52	0,42	0,33
4	0,97	0,86	0,78	0,72	0,68	0,55	0,49	0,41	0,33	0,25
5	0,93	0,79	0,70	0,63	0,59	0,47	0,41	0,34	0,26	0,20
6	0,88	0,72	0,63	0,56	0,52	0,41	0,35	0,29	0,22	0,17
7	0,84	0,66	0,57	0,51	0,47	0,36	0,31	0,25	0,19	0,14
60	0,22	0,14	0,11	0,09	0,08	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02
120	0,12	0,08	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01

Электронный архив УГЛТУ

Таблица 3

Значения *F*-критерия Фишера
(f_1 – число степеней свободы большей дисперсии,
f_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

f_2	f_1											
	q = 0,05											
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,40	19,43	19,45	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,94	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,24	2,09	2,01	1,92	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,91	1,75	1,66	1,55	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00
q = 0,01												
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	6056	6157	6209	6261	6366
2	98,50	99,0	99,17	99,25	99,30	99,33	99,37	99,40	99,43	99,45	99,47	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,42	27,91	27,49	27,23	26,87	26,69	26,50	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,55	14,20	14,02	13,84	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	10,05	9,72	9,55	9,38	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,87	7,56	7,40	7,23	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,62	6,31	6,16	5,99	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,81	5,52	5,36	5,20	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,26	4,96	4,81	4,65	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,85	4,56	4,41	4,25	3,91
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,37	3,23	3,09	2,94	2,42
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,98	2,70	2,55	2,39	2,01

Электронный архив УГЛТУ

Таблица 4

Значения критерия Пирсона χ^2
(k – число степеней свободы)

k	q	
	0,05	0,01
1	3,84	6,63
2	5,99	9,21
3	7,81	11,3
4	9,49	13,3
5	11,1	15,1
10	18,3	23,2
15	25,0	30,6
20	31,4	37,6
25	37,7	44,3
30	43,8	50,9
40	55,8	63,7
50	67,5	76,2